Développement : Fonctions caractéristiques de la loi normal et de Cauchy

RM

2022-2023

Référence :

1. agreg math

Énoncé :

La fonction caractéristique de la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ est

$$exp(i\mu t)exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)$$

La fonction caractéristique de la loi de Cauchy $\mathcal{C}(a, b)$ est

$$e^{iat}e^{-b|t|}$$

On rappelle les informations suivantes :

- Pour $(\mu, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ est définie par sa densité de probabilité $f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.
- Pour $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+$, la loi de Cauchy $\mathcal{C}(a, b)$ est définie par sa densité de probabilité $f(t) = \frac{1}{\pi}\frac{b}{(t-a)^2+b^2}$.
- Pour X v.a à valeurs complexes dans $\mathbb{R}$, on définit la fonction caractéristique de X comme $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$. Si X possède une densité f_X, alors $\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} f_X(t)e^{itx}dx$.

Résolution :

1. On commence par calculer la fonction caractéristique de la loi normale pour $\mu = 0$ et $\sigma = 1$. On note φ la fonction caractéristique de cette loi. Alors comme cette loi possède une densité $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}exp(-x^2/2)$, on en déduit que

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} exp(\frac{-x^2}{2})exp(itx)dx$$

pour tout réel $t \in \mathbb{R}$. On définit la fonction

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{C}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ & (z,x) & \mapsto & exp(-x^2/2)exp(xz) \end{array}$$

et remarquons que $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(it, x)dx$ pour tout réel $t \in \mathbb{R}$. On définit alors la fonction

$$\begin{array}{rccl} F: & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(z,x)dx \end{array}$$

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la fonction $x \mapsto f(z,x) = exp(-x^2/2)exp(xz)$ est mesurable.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $z \mapsto f(z,x)$ est holomorphe. Soit K un compact de $\mathbb{C}$, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $z \in K$, $|z| \leq C$. Ainsi pour tout $z \in K$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |f(z,x)| &= exp(-x^2/2)|exp(xz)| = exp(-x^2/2)exp(xRe(z)) \\ &\leq exp(-x^2/2)exp(|x|C) \end{aligned}$$

La fonction $g_K(x) = exp(-x^2/2)exp(|x|C)$ étant intégrable sur $\mathbb{R}$, on en déduit d'après le théorème d'holomorphie sosu le signe intégrale que F est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Supposons que z soit un réel. Alors dans ce cas, l'intégrale précédente se simplifie considérablement à l'aide du changement de variable $u = x - z$ et à l'aide de la formule de l'intégrale de Gauss :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} exp(-x^2/2)exp(zx)dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} exp(-(x-z)^2/2 + z^2/2)dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(z^2/2) \int_{\mathbb{R}} exp(-(x-z)^2/2)dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(z^2/2) \int_{\mathbb{R}} exp(-u^2/2)du \\ &= exp(z^2/2) \end{aligned}$$

La fonction $z \mapsto exp(z^2/2)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ (comme composée de fonctions holomorphes). Ainsi F coincïde avec $exp(z^2/2)$ sur la droite réel $\mathbb{R}$. Or F est holomorphe sur $\mathbb{C}$. On en déduit d'après le Théorème de prolongement analytique que $F(z) = exp(z^2/2)$ sur $\mathbb{C}$. En particulier, lorsque $z = it$ pour n'importe quel réel $t \in \mathbb{R}$, on obtient que

$$\varphi(t) = exp(-t^2/2).$$

On considère pour finir la variable aléatoire $Y = \sigma X + \mu$ où X est une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$.Alors

$$\begin{aligned} \varphi_Y(t) &= \mathbb{E}[e^{itY}] = \mathbb{E}[e^{it(\sigma X + \mu)}] \\ &= e^{i\mu t}\mathbb{E}[e^{it\sigma X}] = e^{i\mu t}\varphi_X(\sigma t) \\ &= e^{i\mu t}e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} \end{aligned}$$

2. Commençons par calculer la fonction caractéristique de la loi $\mathcal{C}(0,1)$ qui est

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \frac{1}{x^2+1} dx$$

Soit $t \in \mathbb{R}_+$ pour commencer. On définit la fonction holomorphe

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{C} \setminus \{i, -i\} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & \frac{e^{itz}}{1+z^2} \end{array}$$

Pour $R > 1$, on définit le contour Γ par l'union des deux chemins suivants : le chemin γ_1 : $[0,\pi] \mapsto \mathbb{C}$ qui est défini par $\gamma_1(t) = Re^{it}$ et le chemin $\gamma_2 : [-R, R] \mapsto \mathbb{C}$ qui est défini par $\gamma_2(t) = t$.
L'unique pôle de f dans ce contour est i. Ainsi, d'après le théorème des résidus, on a

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} f(z)dz = Res_i f(x) Ind_{\Gamma}(i)$$

Comme l'indice vaut 1, il reste à calculer ce résidus et l'intégrale.

Comme le point i est un pôle d'ordre 1 de f, alors

$$\begin{aligned} Res_i f &= \lim_{z\to i}(z-i)f(z) \\ &= \lim_{z\to i}(z-i)\frac{e^{itz}}{(z-i)(z+i)} \\ &= \lim_{z\to i}\frac{e^{itz}}{z+i} \\ &= \frac{e^{i^2t}}{2i} = -i\frac{e^{-t}}{2} \end{aligned}$$

De plus,

$$\int_{\gamma_2} f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(x)ds \quad \text{et} \quad \int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_0^{\pi} f(Re^{i\theta})iRe^{i\theta}d\theta.$$

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq \frac{1}{1+x^2}$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème de convergence dominée, on a

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}}\frac{e^{itx}}{1+x^2}ds$$

Or cette dernière intégrale est celle qu'on cherche à calculer.
Montrons maintenant que $\int_{\gamma_1} f(z)dz$ converger vers 0 : soit $z = Re^{i\theta}$ avec $\theta \in [0,\pi]$. Alors, comme $t \geq 0$ et comme $\sin(\theta) \geq 0$,

$$|f(Re^{i\theta})e^{i\theta}| = \frac{|e^{itRe^{i\theta}}|}{|1+(Re^{i\theta})^2|} = \frac{e^{-Rt\sin(\theta)}}{|1+R^2e^{i2\theta}|} \leq \frac{1}{R^2-1}$$

car $|R^2e^{i2\theta}|-|1| \leq |1+R^2e^{i2\theta}|$ d'après l'inégalité triangulaire renversée. D'après le théorème de convergence dominée, on en déduit que $\int_{\gamma_1} f(z)dz$ converge vers 0 lorsque R tend vers l'infini. On a donc

$$\begin{aligned} \lim_{R\to+\infty}\int_{\Gamma} f(z)dz = 2i\pi Res_i f \quad &\Leftrightarrow \quad \lim_{R\to+\infty}\left(\int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz\right) = \pi e^{-t} \\ &\Leftrightarrow \quad \int_{\mathbb{R}}\frac{e^{itx}}{1+x^2}dx = \pi e^{-t} \end{aligned}$$

Donc on en déduit que

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{itx}\frac{1}{x^2+1}dx = \frac{1}{\pi}\pi e^{-t} = e^{-t}$$

pour tout $t \geq 0$. Comme la loi est symétrique, on en déduit que $\varphi(t) = e^{-|t|}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
Pour conclure, on définit $Y = bX + A$ où X est une variable aléatoire de loi $\mathcal{C}(0,1)$. Ainsi Y est de loi $\mathcal{C}(a,b)$ en calculant sa densité de probabilité. De plus :

$$\varphi_Y(t) = \mathbb{E}[e^{itY}] = \mathbb{E}[e^{itbX+ait}] = e^{iat}\mathbb{E}[e^{itbX}] = e^{iat}\varphi_X(bt) = e^{iat}e^{-b|t|}$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$.